Ex.15　解: 记

$$\begin{cases} \beta_1=\alpha_1+\alpha_2, \\ \beta_2=\alpha_2+\alpha_3, \\ \qquad\cdots \\ \beta_r=\alpha_r+\alpha_1, \end{cases}$$

再记矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$, $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)$, 则有$B=AK$, 其中,

$$K=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}_{r\times r}.$$

为了研究向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 的线性相关性, 考虑齐次线性方程组

$$x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_r\beta_r=0.$$

即$Bx=0$. 由$B=AK$ 得$AKx=0$. 又向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关, 因此, $Kx=0$. 对系数矩阵K 的行列式$|K|$ 的第n 列展开得

$$|K|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{r\times r}=(-1)^{1+r}+1=\begin{cases} 2, & r\text{为奇数}, \\ 0, & r\text{为偶数}. \end{cases}$$

因此, 当r 为奇数时, $|K|\neq 0$, 即齐次线性方程组$Bx=0$ 只有零解, 从而向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 的线性无关. 当r 为偶数时, $|K|=0$, 即齐次线性方程组$Bx=0$ 有非零解, 从而向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 的线性相关.